風力を受ける建築物へのエネルギー入力の統計的予測

Statistical prediction of energy input to buildings subjected to wind force

洪　起
KOH　Ki

キーワード：エネルギー入力、風力、統計的予測、耐風設計法、周波数領域

Keywords ：energy input, wind force, statistical prediction,wind-resistance design method, frequency domain

It is necessary to access quantitatively the statistics of wind force to control the damage of buildings due to wind force predicted in future.

The purpose of this paper is to develop in the frequency domain a mathematical formula making the statistical prediction of energy input to buildings subjected to wind force, which will become the fundamental formula to establish the rational wind-resistance design method.

1．はじめに

日本における建築物の構造設計においては、建築物の崩壊に直接関連する致命的損傷を与える支配的な外力は地震力と見なされ、将来予想される地震力に対して、構造体の一部を塑性化させながら、地震のエネルギーを吸収し、建築物の損傷を最小限度に抑制するような設計方法がとられている。この方法は、長年にわたる理論的および実験的研究に基づき構築されたもので、十分な信頼性を有する合理的な耐震設計法になっている。

一方、耐風設計では、建築物の高層化により、風荷重が構造設計における支配的な荷重になる場合が生じるが、建築物の使用基準期間内において予想される風荷重に対して建築物は弾性応答を示すように設計されている。それ故、風荷重により、崩壊と直接関連がある塑性変形は生じないように設計されているのが実情である。

しかしながら、現在、風荷重に対して弾性設計を実施したとしても、想定以上の風力に対する建築物の挙動を確認し、建築物の弾塑性応答を考慮した安全性を検討しておく必要があるという観点から、風力による弾塑性構造物の総エネルギー入力に関する研究が行なわれている[1],[2],[3]。

本論は、このような既往の研究と同じ観点から、建築物の使用基準期間内において予想される風力による建築物へのエネルギー入力の統計量の評価式を理論的に導出したものであり、将来、風力による建築物の崩壊の可能性を考慮した耐風設計法構築に際して有効な情報を提供するものである。

2．風力によるエネルギー入力の周波数領域での統計量

地震による建築物の動的挙動と異なり、風力による動的挙動は、風力方向に振動する場合と風力と直交方向に振動する場合の２つがある。それぞれの場合の周波数領域での入力エネルギーの統計量を導出する。

建築物が定常応答状態にあるときの風力作用時間区間は $[t_2, t_1]$ とし、その前後の風力は０と仮定する。

通常、高層建築物は多自由度系になるが、風力による１次モードの風応答に注目し、水平１自由度の１質点系モデルでモデル化できる場合を解析対象とする。

（A）風力方向に振動する場合

水平１自由度の１質点系運動方程式は次式になる。

$$m\frac{d^2y}{dx^2}+c\frac{dy}{dx}+kF(x,t)=y(t) \qquad (2-1)$$

ただし、m, c, k：建築物の質量、減衰係数、剛性

x：建築物の変位、$kF(x,t)$：復元力で、弾性応答の場合は $F(x,t)=x$

$y(t)$：建築物に作用する風力

風力は、作用する時間区間で一定値を有する平均風力と風速の変動およびその他の種々の要因によって発生する変動風力の和で表される。

$$y(t)=y_0+y_1(t) \qquad (2-2)$$

ただし、y_0：平均風力

$y_1(t)$：風方向の風力の変動部分の風力

一般に、風力により建築物が吸収するエネルギーは時間とともに単調増加する量であり、建築物へのエネルギー入力は風力の作用時間帯を含む時間領域（$-\infty, \infty$）で評価することができる。

建築物が定常応答状態にあるときの風力作用時間区間 $[t_2, t_1]$ による建築物への全エネルギー入力 W_I は、仮定により、この区間の両側で風力は０であるという条件のもとで次式になる。

$$W_I=\int_{-\infty}^{\infty}y(t)\dot{x}(t)dt \qquad (2-3)$$

ただし、$\dot{x}(t)$：風力による建築物の速度応答

上式において、フーリエ変換の対を $\dot{x}(t)\leftrightarrow\dot{X}(\omega)$,

$y(t)\leftrightarrow Y(\omega)$ のように表現し、Pransherel の定理

$$\int_{-\infty}^{\infty}y(t)\dot{x}(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{Y}(\omega)\dot{X}(\omega)d\omega \qquad (2-4)$$

を用いると、（２－３）式のエネルギー入力の周波数領域での式は次のようになる。

$$W_I=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{X}(\omega)\overline{Y}(\omega)d\omega \qquad (2-5)$$

ただし、$\overline{Y}(\omega)$ ： $Y(\omega)$ の共役複素数

風力の平均成分を有する $y(t)$ のフーリエ変換は次のようになる。入力エネルギーと同様に、応答時間が十分経過した定常応

答状態を解析対象とすれば、平均風力成分 y_0 のフーリエ変換と、変動部分 $y_1(t)$ のフーリエ変換の和で表され、次式になる。

$$Y(\omega)=Y_0(\omega)+Y_1(\omega) \quad (2-6)$$

ただし、$Y_0(\omega)=y_0 2\pi\delta(\omega)$ ： y_0 のフーリエ変換
$Y_1(\omega)$ ： $y_1(t)$ のフーリエ変換
$\delta(\tau)$ ：デルタ関数

上式中で、$y(t)$ を入力とし、$\dot{x}(t)$ を出力とする入出力システムを考える。このシステム関数を $H(\omega)$ とすれば、$\dot{X}(\omega)$ は $\dot{x}(t)$ のフーリエ変換から得られるから、次式になる。

$$\dot{X}(\omega)=H(\omega)Y(\omega) \quad (2-7)$$

（2－6）式を（2－7）式に代入して（2－5）式を考慮する。さらに、$\dot{x}(t), y(t)$ が実関数であるから、W_I は次式になる。

$$W_I=\int_{-\infty}^{\infty}G(\omega)|Y(\omega)|^2 d\omega$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}G(\omega)|Y_0(\omega)+Y_1(\omega)|^2 d\omega \quad (2-8)$$

ただし、$G(\omega)=\dfrac{1}{2\pi}\mathrm{Re}al[H(\omega)]$、$|Y(\omega)|$：複素数 $Y(\omega)$ の絶対値、$\mathrm{Re}al[H(\omega)]$：複素数 $H(\omega)$ の実数部分

このシステムとして、粘性減衰係数を有する線形１自由度系を想定するならば、（2－8）式の $G(\omega)$ は次式で表される。

$$G(\omega)=\frac{h\omega_0\omega^2}{m\pi\left[\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4h^2\omega_0^2\omega^2\right]} \quad (2-9)$$

ただし、ω_0：無減衰固有振動数、h：減衰定数

特別な場合として、無減衰線形振動系の場合の $G(\omega)$ は次式になる。

$$G(\omega)=\frac{1}{4\pi m}\int_{-\infty}^{\infty}\cos\omega t\exp(-i\omega t)dt$$

$$=\frac{1}{4m}\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right] \quad (2-10)$$

Lyon はホワイトノイズ入力の場合の弾性振動系の自乗平均速度応答から（2－9）式および（2－10）式と同様な式を誘導し、線形振動子のアドミッタンスと呼んでいる。本論ではエネルギー応答を対象にしているので、線形振動系の風力によるエネルギーアドミッタンスと見なすことができる[4]。

建築物系を確定値とし、風力の変動部分をランダム過程としてモデル化するならば、風力のフーリエ振幅スペクトル $|Y(\omega)|$ のみを確率変数として扱えばよい。そのとき、（2－5）式のエネルギー入力 W_I の期待値と分散は次式になる。

$$E[W_I]=\int_{-\infty}^{\infty}G(\omega)E\left[|Y(\omega)|^2\right]d\omega \quad (2-11)$$

$$V[W_I]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}G(\omega_1)G(\omega_2)COV_{|Y|^2}(\omega_1,\omega_2)d\omega_1 d\omega_2 \quad (2-12)$$

上式中の $COV_{|Y|^2}(\omega_1,\omega_2)$ は $|Y(\omega)|^2$ の共分散関数を意味し、次式で表される。

$$COV_{|Y|^2}(\omega_1,\omega_2)=E\left[|Y(\omega_1)|^2|Y(\omega_2)|^2\right]-E\left[|Y(\omega_1)|^2\right]E\left[|Y(\omega_2)|^2\right] \quad (2-13)$$

（2－11）式と（2－12）式は建築物が風力方向に振動する場合のエネルギー入力の統計量になる。

(B) 風力と直交方向に振動する場合

この場合は、平均風力が０であるから、風力は変動部分のみで表される。

結局、（2－2）式は次のようになる。

$$y(t)=y_1(t) \quad (2-14)$$

ただし、$y_1(t)$：風直角方向の変動風力

無論、（2－14）式は風力方向の変動風力とは異なる。

この場合の周波数領域での入力エネルギーの統計量を表す式は、（2－11）式と（2－12）式と全く同じ表現式で表され、それぞれの式で平均風力に関わる項 $Y_0(\omega)$ を０とすればよい。

３．風力による線形振動系へのエネルギー入力

（2－11）式と（2－12）式は風力によるエネルギー入力の周波数領域での統計量である。

風力の変動部分の確率モデルとして、定常ガウシアン・ホワイトノイズを、周波数特性を有する確定線形フイルターに通したランダム過程でモデル化すれば、上式の統計量は次のようになる。

(A) 風力方向に振動する場合

一定なパワースペクトル S_0 を有する定常ガウシアン・ホワイトノイズ $n(t)$ の自己相関関数は次のように定義される。

$$E[n(\tau_1)n(\tau_2)]=S_0\delta(\tau_2-\tau_1) \quad (3-1)$$

ただし、$E[n(\tau_1)n(\tau_2)]$：ホワイトノイズの自己相関関数

平均を有する風力のフーリエ変換 $Y(\omega)$ は（2－6）式で表される。 $Y_1(\omega)$ は風力の変動部分のスペクトル密度に変換する線形フイルターの伝達関数 $F(\omega)$ を用いると、次のようになる。

$$Y_1(\omega)=F(\omega)N(\omega) \quad (3-2)$$

ただし、$N(\omega)\leftrightarrow n(t)$：$n(t)$ のフーリエ変換

$F(\omega)$ ：$n(t)$ を風力の変動部分のスペクトル密度に変換する線形フイルターの伝達関数

$Y(\omega)$ の自乗振幅の期待値は（2－6）式から次のようになる。

$$E\left[|Y(\omega)|^2\right]=E\left[|Y_0(\omega)+Y_1(\omega)|^2\right]$$

$$=E\left[|Y_0(\omega)|^2\right]+E\left[|Y_1(\omega)|^2\right]+2\mathrm{Re}al\left(E\left[Y_0(\omega)\overline{Y}_1(\omega)\right]\right) \quad (3-3)$$

上式で、

$$E\left[|Y_0(\omega)|^2\right]=S_{Y_0}(\omega)(t_2-t_1) \quad (3-4)$$

ただし、$S_{Y_0}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R_{y_0}(\tau)\exp(-i\omega\tau)d\tau=2\pi y_0^2\delta(\tau)$

$R_{Y_0}(\tau)$：平均風力の自己相関関数

であり、さらに、仮定により、定常応答状態での風力の入力継続時間区間の前後で風力は0であるから、自乗振幅の期待値と風力のパワースペクトルとの関係式は次式になる。

$$E\left[\left|Y_1(\omega)\right|^2\right]=\left|F(\omega)\right|^2 E\left[\left|N(\omega)\right|^2\right]$$

$$=\left|F(\omega)\right|^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E\left[n(\tau_1)n(\tau_2)\right]\exp\{i\omega(\tau_2-\tau_1)\}d\tau_1 d\tau_2$$

$$=\left|F(\omega)\right|^2 S_0 = S_{Y_1}(\omega)(t_2-t_1) \qquad (3-5)$$

上式中の $S_{Y_1}(\omega)$ は、定常ガウシアン・ホワイトノイズを線形フィルターに通した後のランダム過程でモデル化される風力方向の変動部分の風力のパワースペクトルである。

（3－3）式の右辺の第3項は、APPENDIX Aの（A－1）式に変形されるから、$\omega=0$ で $G(\omega)=0$ を考慮すれば、0になる。そのとき第1項も0になり、第2項は（3－5）式に変形される。結局、エネルギー入力の期待値は次式になる。

$$E[W_I]=\int_0^{\infty} G(\omega)S_F(\omega)d\omega(t_2-t_1) \qquad (3-6)$$

ただし、$S_F(\omega)=2S_{Y_1}(\omega)$：風力方向に振動する場合で、周波数の正の領域で定義される風力の変動部分の片側パワースペクトル

（3－6）式で表されるエネルギー入力の期待値は、エネルギーアドミッタンスと変動部分の風力のパワースペクトルのみに依存し、平均風力のパワースペクトル $S_{Y_0}(\omega)$ に依存しないことが分かる。

一方、（2－13）式の共分散関数は、（2－6）式を用いると次のように展開される。

$$COV_{|Y|^2}(\omega_1,\omega_2)=$$

$$Y_0(\omega_1)Y_0(\omega_2)\overline{F}(\omega_1)\overline{F}(\omega_2)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E[n(\tau_1)n(\tau_2)]\exp\{i\omega_1\tau_1+i\omega_2\tau_2\}d\tau_1 d\tau_2 +$$

$$Y_0(\omega_1)\overline{Y}_0(\omega_2)\overline{F}(\omega_1)F(\omega_2)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E[n(\tau_1)n(\tau_2)]\exp\{-i\omega_1\tau_1+i\omega_2\tau_2\}d\tau_1 d\tau_2$$

$$-\overline{Y}_0(\omega_1)Y_0(\omega_2)F(\omega_1)\overline{F}(\omega_2)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E[n(\tau_1)n(\tau_2)]\exp\{-i\omega_1\tau_1+i\omega_2\tau_2\}d\tau_1 d\tau_2$$

$$+\overline{Y}_0(\omega_1)\overline{Y}_0(\omega_2)F(\omega_1)F(\omega_2)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E[n(\tau_1)n(\tau_2)]\exp\{-i\omega_1\tau_1-i\omega_2\tau_2\}d\tau_1 d\tau_2$$

$$+\left|F(\omega_1)\right|^2\left|F(\omega_2)\right|^2\Big\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E[n(\tau_1)n(\tau_2)n(\tau_3)n(\tau_4)]$$

$$\exp\{-i\omega_1\tau_1+i\omega_1\tau_2-i\omega_2\tau_3+i\omega_2\tau_4\}d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E[n(\tau_1)n(\tau_2)]\exp\{-i\omega_1\tau_1+i\omega_1\tau_2\}d\tau_1 d\tau_2 \cdot$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E[n(\tau_1)n(\tau_2)]\exp\{-i\omega_2\tau_1+i\omega_2\tau_2\}d\tau_1 d\tau_2\Big\} \qquad (3-7)$$

$n(t)$ は定常ガウシアン・ホワイトノイズであると仮定すれば、4次モーメントの期待値は次のように展開される。

$$E[n(\tau_1)n(\tau_2)n(\tau_3)n(\tau_4)]=E[n(\tau_1)n(\tau_2)n(\tau_3)n(\tau_4)]$$
$$+E[n(\tau_1)n(\tau_3)n(\tau_2)n(\tau_4)]+E[n(\tau_1)n(\tau_4)n(\tau_2)n(\tau_3)] \qquad (3-8)$$

この式を考慮すれば、（3－7）式の共分散関数は次のようになる。

$$COV_{|Y|^2}(\omega_1,\omega_2)=2\pi S_0\delta(\omega_1+\omega_2)\cdot$$

$$\left[Y_0(\omega_1)Y_0(\omega_2)\overline{F}(\omega_1)\overline{F}(\omega_2)+\overline{Y}_0(\omega_1)\overline{Y}_0(\omega_2)F(\omega_1)F(\omega_2)\right]$$

$$+2\pi S_0\delta(\omega_1-\omega_2)\cdot$$

$$\left[Y_0(\omega_1)\overline{Y}_0(\omega_2)\overline{F}(\omega_1)F(\omega_2)+\overline{Y}_0(\omega_1)Y_0(\omega_2)F(\omega_1)\overline{F}(\omega_2)\right]$$

$$+2\pi S_0^2\left|F(\omega_1)\right|^2\left|F(\omega_2)\right|^2\left[\delta(\omega_1+\omega_2)+\delta(\omega_1-\omega_2)\right](t_2-t_1) \qquad (3-9)$$

（3－9）式を（2－12）式に代入し、$G(\omega)$，$F(\omega)$ が偶関数であることを考慮すれば、（2－12）式は次式になる。

$$V[W_I]=8\pi S_0\int_{-\infty}^{\infty} G^2(\omega)\left|Y_0(\omega)\right|^2\left|F(\omega)\right|^2 d\omega$$

$$+4\pi S_0^2\int_{-\infty}^{\infty} G^2(\omega)\left|F(\omega)\right|^4 d\omega(t_2-t_1) \qquad (3-10)$$

上式で、（2－6）式と（2－9）式を考慮すれば、右辺の第1項は0になる。さらに、$G(\omega)$，$F(\omega)$ が偶関数であるから、結局、エネルギー入力の分散は次式になり、期待値と同様、平均風力に依存しない式になる。

$$V[W_I]=2\pi\int_0^{\infty} G^2(\omega)S_F^2(\omega)d\omega(t_2-t_1) \qquad (3-11)$$

上式中の $S_F(\omega)$ は、（3－6）式で示したように、風力の変動部分の片側パワースペクトルである。

(B) 風力と直交方向に振動する場合

この場合のエネルギー入力の期待値は平均風力が0であるので、（3－3）式において $Y_0(\omega)=0$ とし、$Y_1(\omega)$ の代わりに $Y(\omega)$ を用いて表せばよい。（3－6）式において、風力と直交方向の変動部分の片側パワースペクトル $S_L(\omega)$ を用いて表せば、次のように表される。

$$E[W_I]=\int_0^{\infty} G(\omega)S_L(\omega)d\omega(t_2-t_1) \qquad (3-12)$$

ただし、$S_L(\omega)=2S_Y(\omega)$

上式中の $S_L(\omega)$ は、(A) と同様に、定常ガウシアン・ホワイトノイズを線形フィルターに通した後のランダム過程で表される風力と直交方向の変動部分の片側パワースペクトルである。

（2－13）式の共分散関数は次のようになる。

$$COV_{|Y|^2}(\omega_1,\omega_2)=$$

$$\left|F(\omega_1)\right|^2\left|F(\omega_2)\right|^2\Big\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E[n(\tau_1)n(\tau_2)n(\tau_3)n(\tau_4)]$$

$$\exp\{i\omega_1(\tau_2-\tau_1)\}\exp\{i\omega_2(\tau_4-\tau_3)\}d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4$$

$$-E\left[\left|N(\omega_1)\right|^2\right]E\left[\left|N(\omega_1)\right|^2\right] \qquad (3-13)$$

上式で、風力方向に振動する場合と同様に、4次モーメント

の期待値の公式（３－８）式を用いると、次式が得られる。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}S_0^2\delta(\tau_2-\tau_1)\delta(\tau_4-\tau_3)\exp\{i\omega(\tau_2-\tau_1)\}\exp\{i\omega(\tau_4-\tau_3)\}$$

$$d\tau_1 d\tau_2 d\upsilon_3 d\tau_4 = S_0^2(t_2-t_1)^2$$

$$E\left[|N(\omega_1)|^2\right]E\left[|N(\omega_1)|^2\right] = S_0^2(t_2-t_1)^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}S_0^2\exp\{-i(\omega_1+\omega_2)\tau_1\}\exp\{i(\omega_1+\omega_2)\tau_2\}d\tau_1 d\tau_2$$

$$=2\pi S_0^2\delta(\omega_1+\omega_2)(t_2-t_1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}S_0^2\exp\{-i(\omega_1-\omega_2)\tau_1\}\exp\{i(\omega_1-\omega_2)\tau_2\}d\tau_1 d\tau_2$$

$$=2\pi S_0^2\delta(\omega_1-\omega_2)(t_2-t_1)$$

以上の４つの式を考慮すれば（３－13）式は次式になる。

$$COV_{|Y|^2}(\omega_1,\omega_2)=2\pi S_0^2|F(\omega_1)|^2|F(\omega_2)|^2[\delta(\omega_1+\omega_2)+\delta(\omega_1-\omega_2)]\cdot (t_2-t_1) \quad (3-14)$$

（３－14）式を（２－12）式に代入すれば、次式が得られる。

$$V[W_I]=4\pi S_0^2\int_{-\infty}^{\infty}G^2(\omega)|F(\omega)|^4 d\omega(t_2-t_1) \quad (3-15)$$

（３－11）式と同様にして、$G(\omega)$, $F(\omega)$ が偶関数であるから、この場合のエネルギー入力の分散は次のようになる。

$$V[W_I]=2\pi\int_{0}^{\infty}G^2(\omega)S_L^2(\omega)d\omega(t_2-t_1) \quad (3-16)$$

以上、将来予想される風力を受ける建築物へのエネルギー入力の統計量の予測値は、風力方向に振動する場合には（３－６）式と（３－11）式で、また、風力と直交方向に振動する場合には（３－12）式と（３－16）式で評価されることを示した。

４．結論

風力による構造物へのエネルギー入力を周波数領域で表現し、将来予想され入力エネルギーの統計量を理論的に導出した。

APPENDIX A

（３－３）式の右辺の第３項は次のように変形される。

$$\mathrm{Re}al\left(E\left[Y_0(\omega)\overline{Y_1}(\omega)\right]\right)=$$

$$E\left[\mathrm{Re}al(Y_0(\omega))\mathrm{Re}al(Y_1(\omega))+\mathrm{Im}ag(Y_0(\omega))\mathrm{Im}ag(Y_1(\omega))\right] \quad (A-1)$$

参考文献

［１］辻田脩、早部安弘、大熊武司、和田章：弾塑性構造物の風応答性状ならびにその予測に関する研究、その１　風直角方向振動の場合、日本建築学会構造系論文集、No.481, pp.9-16, Mar., 1996

［２］辻田脩、早部安弘、大熊武司、和田章：弾塑性構造物の風応答性状ならびにその予測に関する研究、その２　風方向振動の場合、日本建築学会構造系論文集、No.485, pp.25-34, Jul., 1996

［３］吉江慶祐、北村春幸、大熊武司：変動風力による弾塑性構造物への総エネルギー入力に関する研究：日本建築学会構造系論文集、No.572, pp.31-38, Oct., 2003

［４］Lyon, R.H.: Statistical Energy Analysis of Dynamical Systems , Theory and Application, MIT Press,1975

［５］大井謙一、田中尚、高梨晃一：地震動による構造物へのエネルギー入力の統計的予測に関する基礎的研究：日本建築学会構造系論文報告集、No.347, pp.47-55, Jan., 1985

［６］洪起、田中尚：ホワイトノイズを受ける１自由時系の履歴吸収エネルギー、日本建築学会論文報告集、No.270,pp.99-103, Aug., 1978